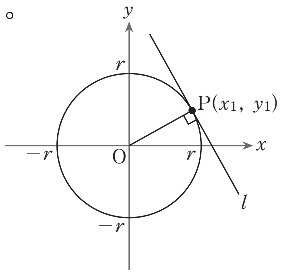
PART4 円の接線

要点 ① 円の接線の方程式



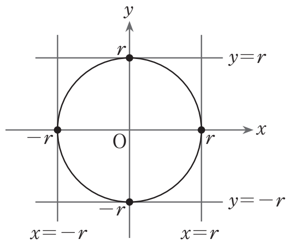
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P(x_1, y_1) における接線 l の方程式を求める。

点 P が座標軸上にないとき，すなわち $x_1\neq0$，$y_1\neq0$ のとき，

直線 OP の傾きは ── である。l　OP であるから，l の傾きは

　　　である。よって，接線 l の方程式は

$$y=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1 \qquad \text{すなわち} \quad x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$



また，点 P(x_1, y_1) は円上の点であることから $x_1^2+y_1^2=r^2$

よって，接線 l の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$ である。

この式は，点 P が座標軸上にある場合も成り立つ。

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

例　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 (3, −4) における接線の方程式は

$x+\qquad y=25$

すなわち　$3x-4y=25$

要点 ② 円の外部の点から円に引いた接線の方程式

ここでは，円の外部の点から円に引いた接線の方程式を求める。

例　点 A(3, 1) から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式を求める。

接点を P　　　　　とすると，点 P における接線の方程式は

$x+\quad y=5$ …… ①

この直線が点 A(3, 1) を通るので $3x_1+y_1=5$ …… ②

また，点Ｐは円上の点であるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=5$ …… ③

②より　$y_1=-3x_1+5$ …… ④

これを③に代入して整理すると　$x_1{}^2-3x_1+2=0$

これを解いて $x_1=1$，2

④より　$x_1=1$ のとき　$y_1=2$　　　$x_1=2$ のとき $y_1=-1$

したがって①から，求める接線の方程式は

$x+2y=5$，$2x-y=5$

4 (1) 円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P(2, 1) における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 A(4, −2) から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

Point Pickup

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

円外の点から引いた接線の方程式

① 接点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおき，点 P における接線の方程式を求める。

② ①の方程式に，通る円外の点の座標を代入する。

③ 点 P は円上の点であることから，点 P の座標を円の方程式に代入する。

④ ②と③を連立方程式として解き，x_1，y_1 を求め，①に代入して接線の方程式を求める。

第 6 講　PART4 確認問題

1 円 $x^2+y^2=10$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式は

$$x+\boxed{ア}y=\boxed{イウ}$$

である。

2 点 A$(3,\ -1)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式は

$$x-\boxed{エ}y=\boxed{オ},$$

$$\boxed{カ}x+y=\boxed{キ}$$

であり，接点の座標は

$$\left(\boxed{ク},\ \boxed{ケコ}\right),\ \left(\boxed{サ},\ \boxed{シ}\right)$$

である。

PART4 円の接線

4 (1) 円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P(2, 1) における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 A(4, −2) から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

[解答]

(1) $2\cdot x+1\cdot y=5$　すなわち　$2x+y=5$

(2) 接点を $P(x_1,\ y_1)$ とすると，点 P における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=10 \quad \cdots\cdots ①$$

この直線が点 A(4, −2) を通るので $4x_1-2y_1=10$　すなわち $2x_1-y_1=5$ …… ②

また，点 P は円上の点であるから　$x_1^2+y_1^2=10$ …… ③

②より　$y_1=2x_1-5$ …… ④

これを③に代入して整理すると　$x_1^2-4x_1+3=0$　　これを解いて $x_1=1,\ 3$

④より　$x_1=1$ のとき　$y_1=-3$　　　$x_1=3$ のとき　$y_1=1$

したがって①から，求める接線の方程式は

$$x-3y=10,\ 3x+y=10$$

また，接点の座標は　(1, −3)，(3, 1)

第 6 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イウ：10

[解説]

円 $x^2+y^2=10$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式は

$$1\cdot x+3\cdot y=10$$ [A]

すなわち　$\boldsymbol{x+3y=10}$

[A]　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
$x_1x+y_1y=r^2$

2 **[正解]** **エ**：2，**オ**：5，**カ**：2，**キ**：5，**ク**：1，
ケコ：−2，**サ**：2，**シ**：1

[解説]

接点を $P(x_1, y_1)$ とすると，点 P における接線の方程式は

$x_1x + y_1y = 5$ ……① [B] [C]

この直線が点 $A(3, -1)$ を通るので

$3x_1 - y_1 = 5$ ……② [C]

また，点 P は円上の点であるから

$x_1^2 + y_1^2 = 5$ ……③ [C]

②より　$y_1 = 3x_1 - 5$ ……④

これを③に代入すると

$x_1^2 + (3x_1 - 5)^2 = 5$

$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$

$x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$

$(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$

$x_1 = 1, 2$

④より

$x_1 = 1$ のとき　$y_1 = -2$ [C]

$x_1 = 2$ のとき　$y_1 = 1$

したがって①から，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{x - 2y = 5,\ 2x + y = 5}$

また，接点の座標は **(1, −2)，(2, 1)**

[B]　円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は
$x_1x + y_1y = r^2$

[C]　円外の点から引いた接線の方程式
① 接点 P の座標を (x_1, y_1) とおき，点 P における接線の方程式を求める。
② ①の方程式に，通る円外の点の座標を代入する。
③ 点 P は円上の点であることから，点 P の座標を円の方程式に代入する。
④ ②と③を連立方程式として解き，x_1，y_1 を求め，①に代入して接線の方程式を求める。